Prolongement de la fonction ζ

On pose $\theta : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ et on admet l'équation fonctionnelle

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+^*.$$

<u>Théorème :</u> La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.

<u>Démonstration :</u> Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$.

On a $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s/2-1}\,dx = \pi^{s/2} n^s \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1}\,dy \qquad \left(y = \frac{x}{\pi n^2}\right)$

donc $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \pi^{s/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1}\,dy$.

On pose $\tilde{\theta} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2}(\theta(t) - 1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\,\tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}$$

On définit la suite de fonctions (f_N) par $f_N : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \longmapsto \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2 y} y^{s/2-1}$,

et on remarque qu'elle converge simplement vers $y \longmapsto \tilde{\theta}(y)\, y^{s/2-1}$.

On pose $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\sigma/2-1}$, de sorte que $|f_N(y)| \leqslant g(y)$ pour tous $N \in \mathbb{N}^*$

et $y \in \mathbb{R}_+$. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} g(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\sigma/2-1}\,dy$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\sigma/2-1}\,dy \quad \text{par Fubini-Tonelli}$$

donc $\int_0^{+\infty} g(y)\,dy = \frac{1}{\pi^{\sigma/2}} \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty$ car $\sigma > 1$.

Ceci prouve que g, qui est positive, est intégrable.

Par convergence dominée, on a $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \pi^{s/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}\, y^{s/2-1}\,dy$

$$= \pi^{s/2} \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_N(y)\,dy$$

$$= \pi^{s/2} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\, y^{s/2-1}\,dy$$

Or $\int_0^1 \tilde{\theta}(y)\, y^{s/2-1}\,dy = \int_0^1 \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) y^{s/2-3/2}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 y^{s/2-3/2}\,dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y^{s/2-1}\,dy$

$$= \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\, y^{-s/2-1/2}\,dy + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

d'où $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{s/2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \pi^{s/2} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\left(y^{s/2-1} + y^{-s/2-1/2}\right) dy$.

Pour tout $y \geqslant 1$, l'application $s \longmapsto \tilde{\theta}(y)\left(y^{s/2-1} + y^{-s/2-1/2}\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $y \geqslant 1$, on a $\tilde{\theta}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y} = \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} \leqslant \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Si $s \in \{z \in \mathbb{C},\ a \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant b\}$, avec $\begin{matrix} a > -\infty \\ b < +\infty \end{matrix}$, on a, pour tout $y \geqslant 1$,

$$\left|\tilde{\theta}(y)\left(y^{s/2-1} + y^{-s/2-1/2}\right)\right| \leqslant \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi}}\left(y^{b/2-1} + y^{-a/2-1/2}\right),$$

donc l'application $\psi : s \longmapsto \pi^{s/2} \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(y)\left(y^{s/2-1} + y^{-s/2-1/2}\right) dy$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi, on a $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{s/2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \psi(s)$.

Or la fonction Γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ne s'annule pas, a pour pôles simples les entiers négatifs et la fonction $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc la fonction γ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet au plus un pôle simple en 0 et en 1. Or Γ admet un pôle simple en 0 donc γ n'admet pas 0 comme pôle.